Exercice 1 (2,5 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout entier naturel n

0,75 1) Vérifier que : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout entier naturel n puis montrer 3par récurrence que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$ pour tout entier naturel n

0 ;75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis en déduire que : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ pour tout entier naturel n

0,5 b) Montrer que : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout entier naturel n puis écrire u_n en fonction de n

0,5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(2 , 1 , 3) ; B(3 , 1 , 1) ; C(2 , 2 , 1) et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

0,5 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

0,5 b) En dédire que : $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) a) Montrer que la sphère (S) a pour centre le point Ω(1 , -1 , 0) et pour rayon 6

0,5 b) Montrer que d(Ω , (ABC)) = 3 et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ)

0,5 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 b) Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ)

Exercice 3 (3 points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes ℂ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points Ω , A et B d'affixe respectives ω , a et b telles que : $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$.

0,75 a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$

Vérifier que : $u = 3 + 3i$ puis montrer que : $\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

0,25 b) Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u)

0,75 c) Vérifier que : $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que : $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

0,5	d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ Déterminer l'image du point A par la rotation R

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, simultanément , deux boules de l'urne

1 — 1) Soit A l'événement : « Les deux boules tirées sont rouge »
Montrer que : $p(A) = \frac{2}{15}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à cheque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des deux boules

0,5 — a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2\ ,3\ ,5\}$

1,5 — b) Montrer que : $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème (8,5 points) :

I- On considère la fonction numérique f définie sur ℝ par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm)

0,25 — 1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0,5 — b) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,5 — 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,5 — b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0,5 — 3) a) Montrer que : $f'(x) = 2(e^{x} - 1)^2$ pour tout nombre réel x

0,25 — b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur ℝ (Remarquer $f'(0) = 0$)

0,75 — c) Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

0,5 — 4) a) Montrer que la courbe (C_f) est situé au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$

0,5 — b) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées (0 , -5)

0,75 — c) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$
(on prendra $\ln 4 \approx 1{,}4$ *et* $\alpha \approx 1{,}3$)

0,5 — 5) a) Montrer que : $\int_0^{\ln 4}(e^{2x} - 4e^{x})dx = -\frac{9}{2}$

0,5 — b) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x = \ln 4$

0,5 — II- 1) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

0,5 — b) Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant : g(0) = - 3 et g'(0) = - 2

2) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^{x})$

0,75 — a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur ℝ

0,75 — b) Vérifier que : $h(\ln(5)) = \ln\ 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$